

Kapitel 11

Rekursion

Ziele

- Das Prinzip der rekursiven Berechnungsvorschrift verstehen.
- Rekursive Methoden in Java implementieren können.
- Verschiedene Formen der Rekursion kennen lernen.
- Quicksort als rekursive Methode zur Sortierung eines Arrays formulieren können und verstehen.

Rekursive Algorithmen und Methoden

- Ein Algorithmus ist **rekursiv**, wenn in seiner (endlichen) Beschreibung derselbe Algorithmus wieder aufgerufen wird. Der Algorithmus ist dann selbstbezüglich definiert.
- Rekursive Algorithmen können in Java durch **rekursive Methoden** implementiert werden.
- Eine Methode ist rekursiv, wenn in ihrem Rumpf (Anweisungsteil) die Methode selbst wieder aufgerufen wird.

Erläuterungen zu Folie 3

Beispiel: Treppe hochgehen

- Wenn keine Stufe mehr, dann fertig.
- Ansonsten (d.h. es gibt noch Stufen): steige eine Stufe hoch und steige den Rest der Treppe hoch (d.h. wende den gleichen Algorithmus auf die kürzere Treppe an)

Allgemeines Prinzip:

- für einen einfachen Fall weiß man das Ergebnis sofort -> „Basisfall“
- Ansonsten:
 - Idee 1:
Mache ein bisschen Arbeit, um das Problem zu verkleinern, und wende den Algorithmus auf das kleinere Problem an -> „Rekursion“

(d.h. eine rekursive Vorschrift verkleinert das Problem so lange, bis der Basisfall erreicht wird und die Rekursion beendet wird bzw. terminiert)
 - Idee 2:
Nimm an, dass das Ergebnis für ein kleineres Problem schon bekannt ist, und berechne daraus das Gesamtergebnis

Die Fakultätsfunktion

- Rekursive Definition der Fakultät:

$$0! = 1$$

$$n! = n * (n-1)! \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 1$$

z.B. $3! = 3 * 2 * 1$
 $\Rightarrow n! = n * \underbrace{(n-1) * \dots * 1}_{(n-1)!}$

z.B. $3! = 3 * 2! = 3 * (2 * 1!) = 3 * (2 * (1 * 0!)) = 3 * (2 * (1 * 1)) = \dots = 6$

- Rekursive Methode:

```
public static int fact(int n) {  
    if (n == 0) return 1;  
    else return n * fact(n-1);  
}
```

↑
rekursiver Aufruf!

z.B. $fact(3) = 3 * fact(2) = 3 * (2 * fact(1)) = 3 * (2 * (1 * fact(0))) =$
 $= 3 * (2 * (1 * 1)) = 3 * (2 * 1) = 3 * 2 = 6$

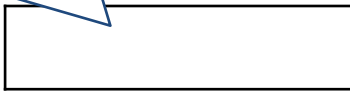
Rückwärts ausmultiplizieren („zurückklappern“)

Rekursive Methodenaufrufe

Beispiel: `int k = fact(3);`

Speicherplatz für lokale Variable

k

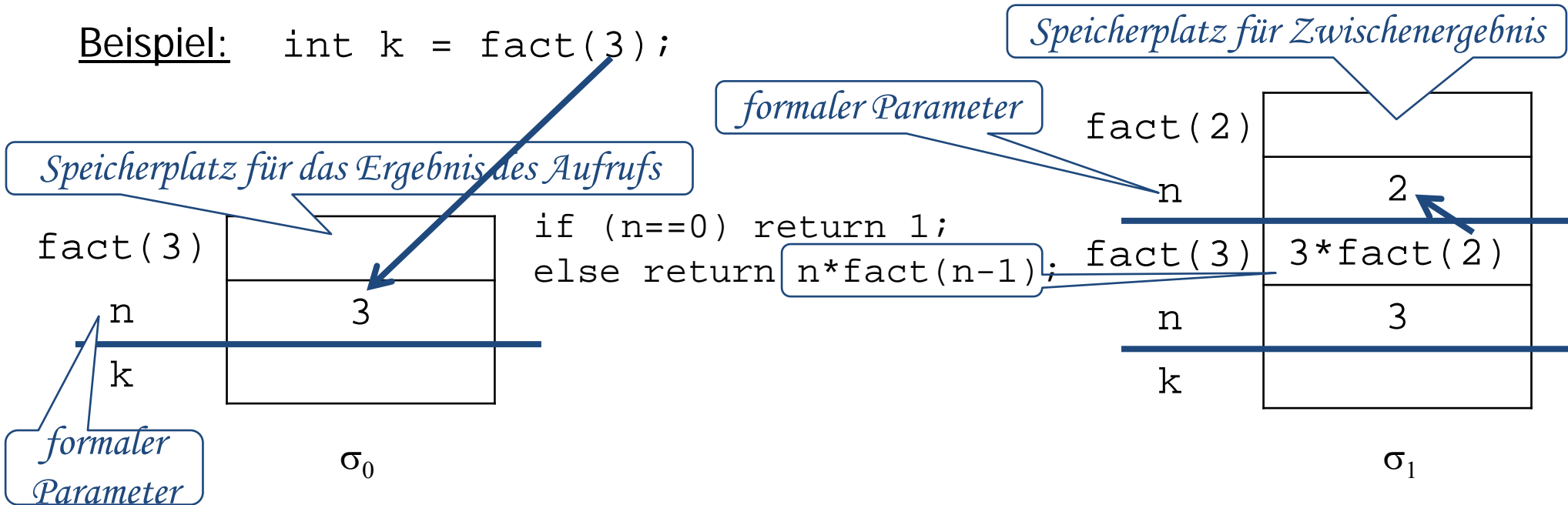


σ

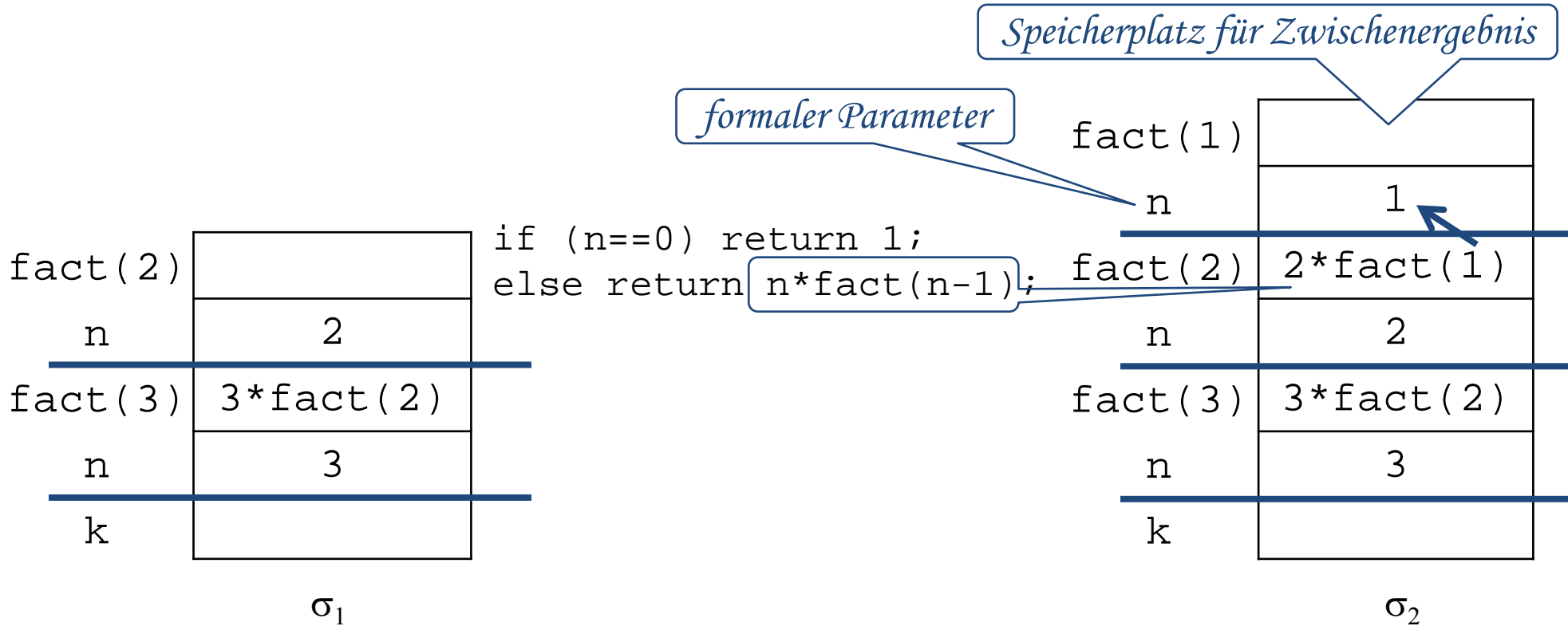
Auswertung rekursiver Methodenaufrufe

Bei der Auswertung wird ein Stack für die Zwischenergebnisse der geschachtelten Methodenaufrufe aufgebaut, der am Ende gemäß des Rekursionsschemas rückwärts abgearbeitet wird.

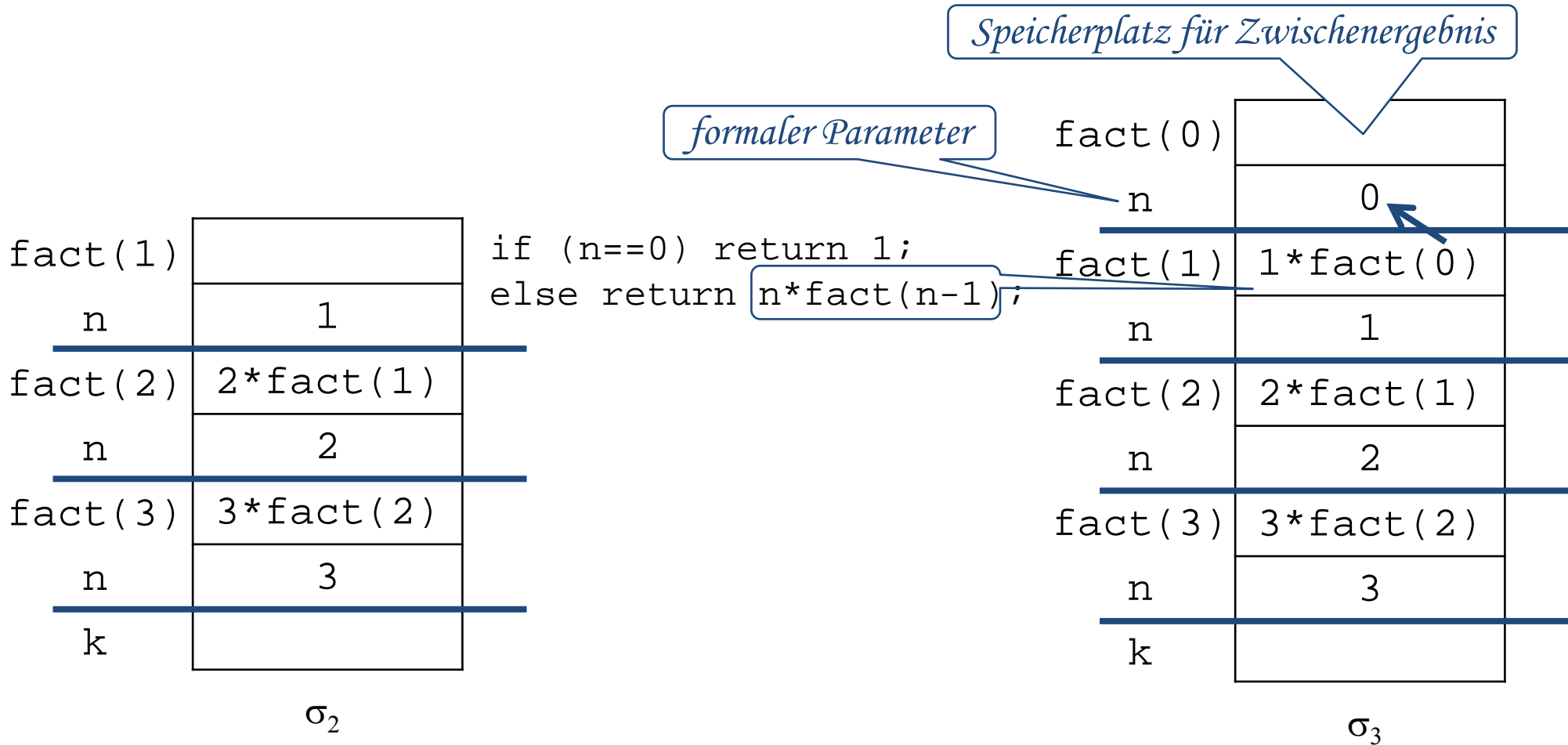
Beispiel: `int k = fact(3);`



Aufbau des Stacks zur Berechnung von `fact(2)`



Aufbau des Stacks zur Berechnung von fact(1)



Berechnung von `fact(0)`

<code>fact(0)</code>	
n	0
<code>fact(1)</code>	<code>1*fact(0)</code>
n	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
n	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
n	3
k	

σ_3

`if (n==0) return 1;`
`else return n*fact(n-1);`

<code>fact(0)</code>	1
n	0
<code>fact(1)</code>	<code>1*fact(0)</code>
n	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
n	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
n	3
k	

σ_4

Berechnung von `fact(1)` und Abbau des Stacks

fact(0)	1
n	0
<hr/>	
fact(1)	1*fact(0)
n	1
<hr/>	
fact(2)	2*fact(1)
n	2
<hr/>	
fact(3)	3*fact(2)
n	3
<hr/>	
k	

σ_4

fact(1)	1
n	1
<hr/>	
fact(2)	2*fact(1)
n	2
<hr/>	
fact(3)	3*fact(2)
n	3
<hr/>	
k	

σ_5

Berechnung von `fact(2)` und Abbau des Stacks

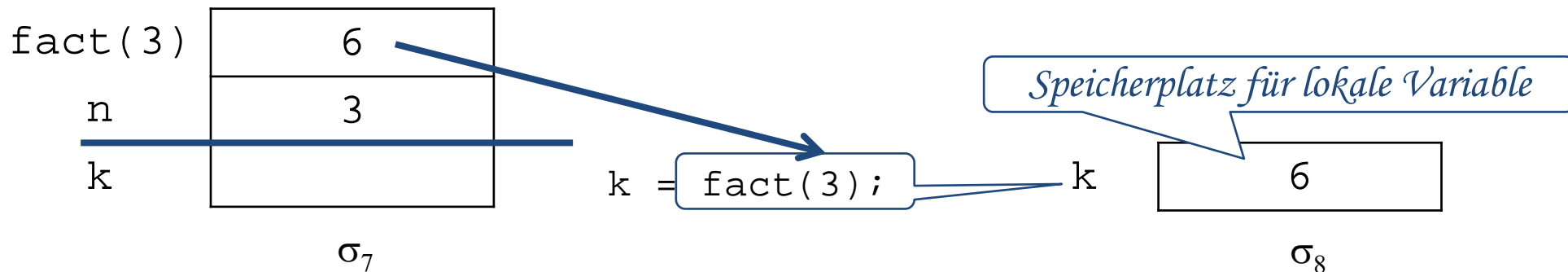
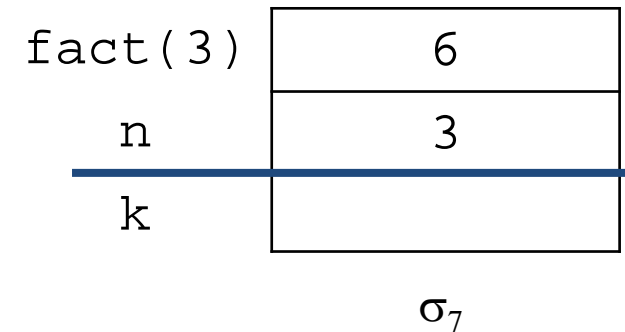
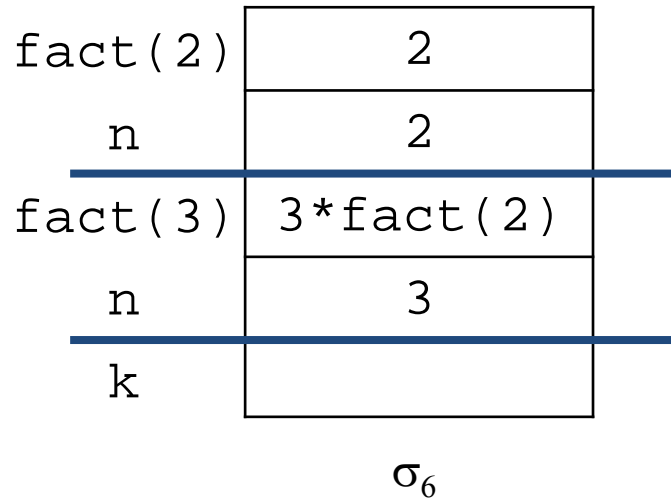
fact(1)	1
n	1
fact(2)	2*fact(1)
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

σ_5

fact(2)	2
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

σ_6

Berechnung von `fact(3)`, Abbau des Stacks und Zuweisung des Ergebnisses



Terminierung

Der Aufruf einer rekursiven Methode **terminiert**, wenn nach endlich vielen rekursiven Aufrufen ein Abbruchfall erreicht wird.

wichtig: sonst endlose Berechnung

Beispiel:

- Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ terminiert der Methodenaufruf `fact(n)`.
- Für alle negativen ganzen Zahlen $n < 0$ terminiert der Methodenaufruf `fact(n)` nicht.

besser:

```
static int fact(int n) {  
    if(n<0) return -1;  
    else if (n==0) ...  
        else ...  
}
```

Rekursion und Iteration (1)

Zu jedem rekursiven Algorithmus gibt es einen semantisch äquivalenten iterativen Algorithmus, d.h. einen Algorithmus mit Wiederholungsanweisungen, der dasselbe Problem löst.

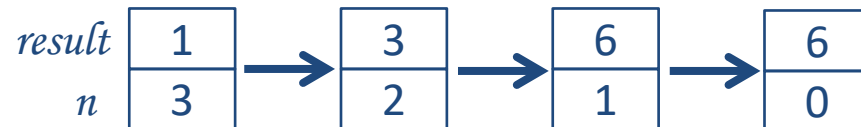
Beispiel:

Wdh: $0! = 1$
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$

```
static int factIterativ(int n) {
    int result = 1;
    while (n != 0) {
        result = result * n;
        n--;
    }
    return result;
}
```

für $n \geq 0$ gilt:
 $factIterativ(n) = fact(n)$

z.B. $factIterativ(3)$



Rekursion und Iteration (2)

- Rekursive Algorithmen sind häufig eleganter und übersichtlicher als iterative Lösungen.
- Gute Compiler können aus rekursiven Programmen auch effizienten Code erzeugen; trotzdem sind iterative Programme meist schneller als rekursive.
- Für manche Problemstellungen kann es wesentlich einfacher sein einen rekursiven Algorithmus anzugeben als einen iterativen.

z.B. „Lotto“ (Zentralübung), „Türme von Hanoi“ (Übungen)

Fibonacci-Zahlen: Rekursive Definition und Methode

■ Rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen:

$$\text{fib}(0) = 1, \quad \text{fib}(1) = 1,$$

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n-2) + \text{fib}(n-1) \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 2$$

■ Rekursive Methode:

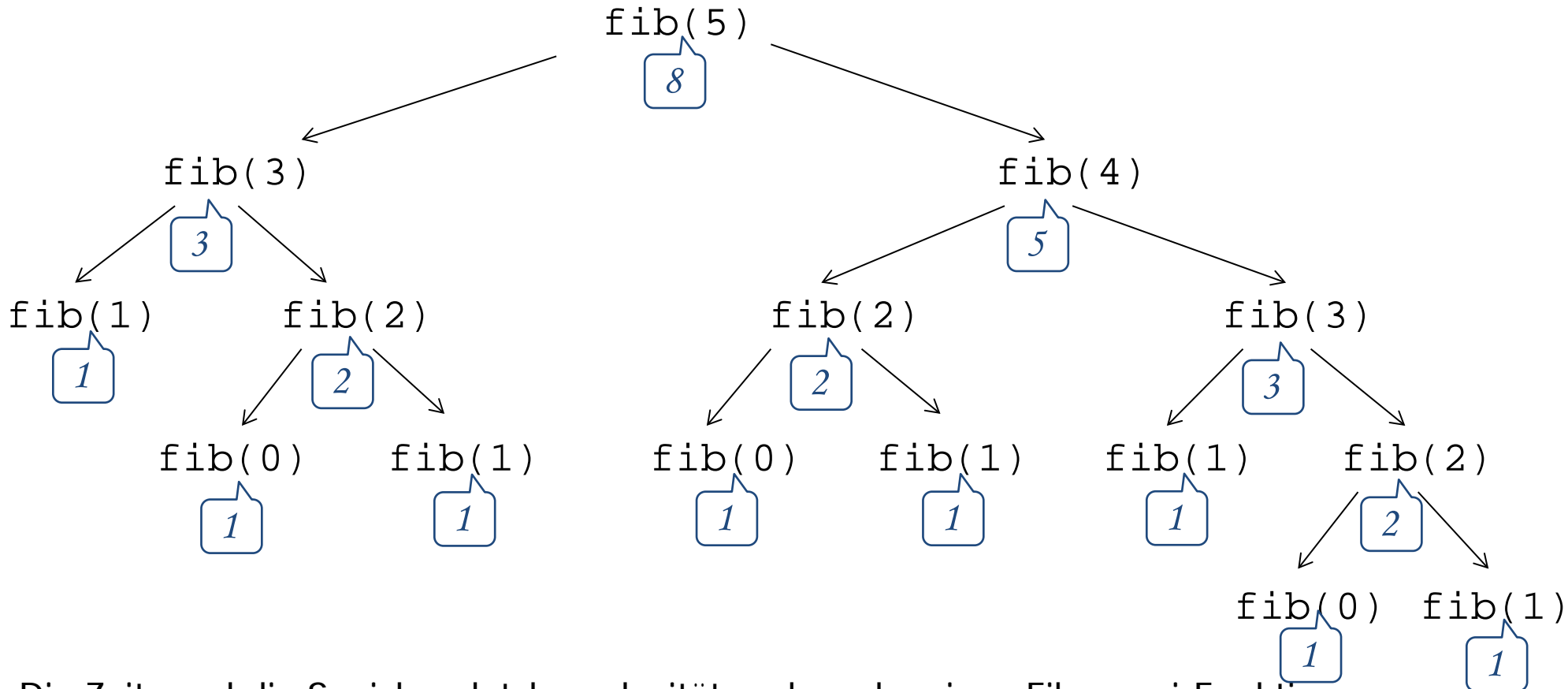
```
static int fib(int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    else return fib(n-2) + fib(n-1);  
}
```

Deutung: $\text{fib}(n)$ = Anzahl der im Jahr n neu geborenen Kaninchenpaare.

Annahme:

- Im Jahr 0 wird ein Paar geboren. $\rightarrow \text{fib}(0) = 1$
- Im Jahr 1 hat dieses Paar ein neues Paar geboren. $\rightarrow \text{fib}(1) = 1$
- In jedem Jahr $n \geq 2$ haben die ein- und zweijährigen Paare jeweils ein neues Paar geboren $\rightarrow \text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$

Kaskade rekursiver Aufrufe



Die Zeit- und die Speicherplatzkomplexitäten der rekursiven Fibonacci-Funktion sind in jedem Fall exponentiell, in $O(2^n)$.

Rekursion

*Warum? Wir müssen $n-1$ Schritte machen (siehe rechter Ast);
in jedem Schritt wird die Anzahl der rekursiven Aufrufe ungefähr verdoppelt.*

Fibonacci-Zahlen: Iterative Methode

```
static int fibIterativ(int n) {  
    int f0 = 1; fib(0)  
    int f1 = 1; fib(1)  
    int f = 1;  
    for (int i = 2; i <= n; i++) {  
        f = f0 + f1; fib(n) = fib(n-2) + fib(n-1)  
        f0 = f1; f0 wird fib(n-1)  
        f1 = f; f1 wird fib(n)  
    }  
    return f;  
}
```

eine for-Schleife

*feste Anzahl von
lokalen Variablen*

Die Zeitkomplexität der iterativen Methode ist linear, d.h. in $O(n)$.

Die Speicherplatzkomplexität der iterativen Methode ist konstant, d.h. in $O(1)$.

Formen der Rekursion

- *Lineare Rekursion:*
In jedem Zweig (der Fallunterscheidung) kommt höchstens ein rekursiver Aufruf vor, z.B. Fakultätsfunktion `fact`.
- *Kaskadenartige Rekursion:*
Mehrere rekursive Aufrufe stehen nebeneinander und sind durch Operationen verknüpft, z.B. Fibonacci-Zahlen `fib`.
- *Verschachtelte Rekursion:*
Rekursive Aufrufe kommen in Parametern von rekursiven Aufrufen vor, z.B. Ackermann-Funktion.



*d.h. geschachtelte
rekursive Aufrufe*

Die Ackermann-Funktion

```
static int ack(int n, int m) {  
    if (n == 0) return m + 1;  
    else if (m == 0) return ack(n - 1, 1);  
    else return ack(n - 1, ack(n, m - 1));  
}
```

Schachtelung

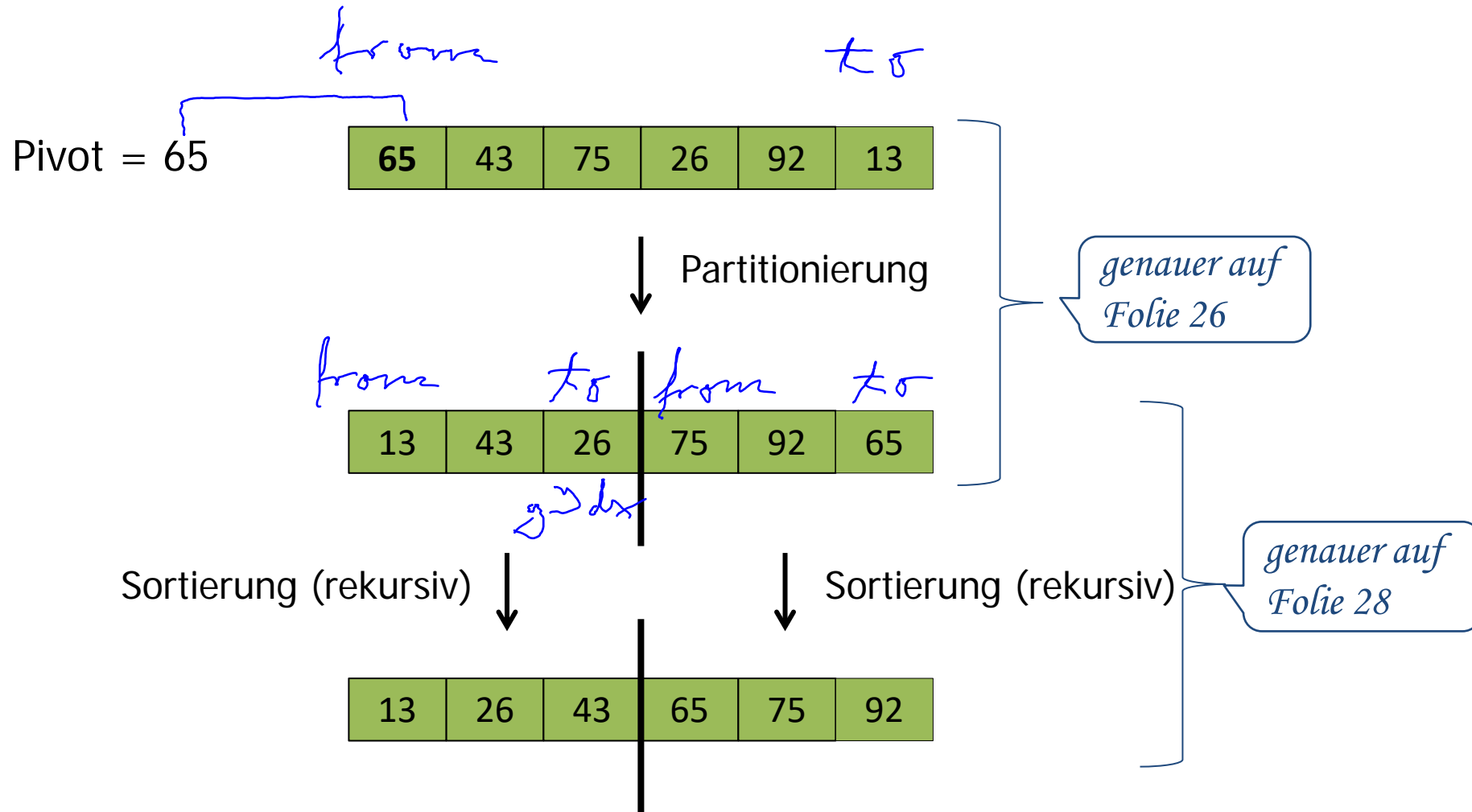
- Die Ackermann-Funktion ist eine Funktion mit exponentieller Zeitkomplexität, die extrem schnell wächst.
- Sie ist das klassische Beispiel für eine berechenbare, terminierende Funktion, die nicht primitiv-rekursiv ist (erfunden 1926 von Ackermann).
- Beispiele:
 - $\text{ack}(4, 0) = 13$
 - $\text{ack}(4, 1) = 65533$
 - $\text{ack}(4, 2) = 2^{65536} - 3$ (eine Zahl mit 19729 Dezimalstellen).
 - $\text{ack}(4, 4) >$ Anzahl der Atome im Universum

Quicksort

ohne Benutzung eines externen Speichers

- Einer der schnellsten Sortieralgorithmen (von C.A.R. Hoare, 1960).
- **Idee:** Falls das zu sortierende Array mindestens zwei Elemente hat:
 1. Wähle irgendein Element aus dem Array als Pivot („Dreh- und Angelpunkt“), z.B. das erste Element.
 2. Partitioniere das Array in einen linken und einen rechten Teil, so dass
 - alle Elemente im linken Teil kleiner-gleich dem Pivot sind und
 - alle Elemente im rechten Teil größer-gleich dem Pivot sind.
 3. Wende das Verfahren rekursiv auf die beiden Teilarrays an.
- Der Quicksort-Algorithmus folgt einem ähnlichen Lösungsansatz wie die binäre Suche. Diesen Lösungsansatz nennt man „Divide-and-Conquer“ („Teile und herrsche“).


Quicksort: Beispiel



Quicksort in Java

```
static void quicksort(double[] a) {  
    qsort(a, 0, a.length - 1);  
}  
  
// Sortiert den Teilbereich a[from]...a[to] von a.  
static void qsort(double[] a, int from, int to) {  
    if (from < to) { //mehr als ein Element zu sortieren  
        double pivot = a[from]; //wähle erstes Element als Pivot  
        //Partitionierung und Rückgabe des Grenzindex  
        int gIdx = partition(a, from, to, pivot); siehe Folie 27  
        //rekursiver Aufruf für den linken Teilarray  
        qsort(a, from, gIdx);  
        //rekursiver Aufruf für den rechten Teilarray  
        qsort(a, gIdx + 1, to);  
    }  
}
```


Partitionierung: Vorgehensweise

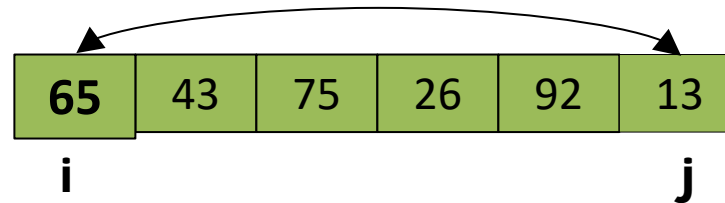
- Laufe von der unteren und der oberen Arraygrenze mit Indizes i und j nach innen und vertausche „nicht passende“ Elemente $a[i]$ und $a[j]$ bis sich die Indizes treffen oder überkreuzt haben.
 - Der zuletzt erreichte Index j wird als Grenzindex der Partitionierung zurückgegeben.
 - Von unten kommend sind Elemente nicht passend, wenn sie größer-gleich dem Pivot sind.
 - Von oben kommend sind Elemente nicht passend, wenn sie kleiner-gleich dem Pivot sind.
 - Bemerkung:
Gegebenenfalls werden auch gleiche Elemente vertauscht. Dies ist aus technischen Gründen nötig, damit der Index j so stoppt, dass der letzte Wert von j immer der richtige Grenzindex ist.
- 

Partitionierung: Beispiel

Pivot = 65

$$a[i] \geq 65$$

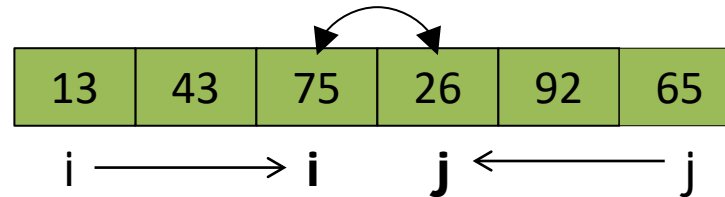
„nicht passend“



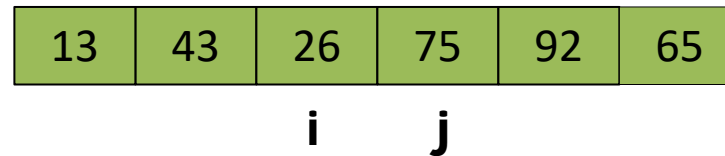
$$a[j] \leq 65$$

„nicht passend“

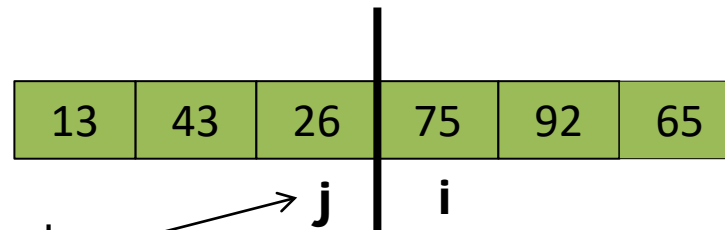
$$a[i] \geq 65$$



$$a[j] \leq 65$$



Grenzindex



Indices überkreuzt

Partitionierung in Java

```

static int partition(double[] a, int from, int to, double pivot) {
    int i = from - 1;
    int j = to + 1;
    while (i < j) {
        i++; //naechste Startposition von links
        //von links nach innen laufen solange Elemente kleiner als Pivot
        while (a[i] < pivot) i++;
        j--; //naechste Startposition von rechts
        //von rechts nach innen laufen solange Elemente größer als Pivot
        while (pivot < a[j]) j--;
        if (i < j) { //vertausche a[i] und a[j]
            double temp = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = temp;
        }
    } //Ende while
    return j; //Rückgabe des Grenzindex
}

```

solange noch nicht überkreuzt

falls nicht überkreuzt und nicht i = j

Partitionierungshierarchie des Quicksort

65	43	75	26	92	13
-----------	----	----	----	----	----

Partitionierung

13	43	26	75	92	65
-----------	----	----	-----------	----	----

Partitionierung

Partitionierung

13	43	26	65	92	75
----	-----------	----	----	-----------	----

Partitionierung

Partitionierung

13	26	43	65	75	92
----	----	----	----	----	----

Länge 6

vgl. Folie 26

3 Stagen

$$\log_2(6) + 1$$

2

$$\log_2(n) + 1$$

Stagen

Zeitkomplexität von Quicksort (1)

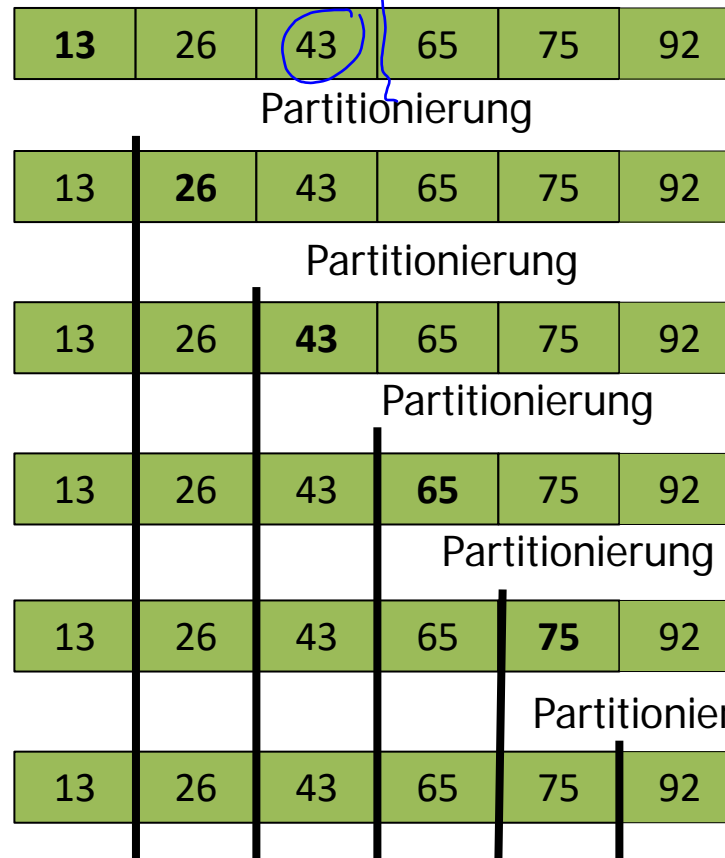
- Beispiel: Das Array von oben hat die Länge 6.
 - Die Hierarchie der Partitionierungen stellt einen Baum dar mit 3 Etagen, wobei $3 = \log_2(6) + 1$. *jedes Mal in etwa halbiert*
 - Alle Partitionierungen einer Etage benötigen zusammen maximal $c * 6$ Schritte (mit einer Konstanten c). *jedes Element im Array anschauen*
 - Folglich ist die Zeitkomplexität in diesem Fall durch $6 * \log_2(6)$ beschränkt.
- Allgemein: *abhängig vom gewählten Pivot*
 - Wenn ein Array der Länge n immer wieder in zwei etwa gleich große Teile aufgeteilt wird, dann ist die Anzahl der Partitionierungs-Etagen durch $\log_2(n)$ beschränkt.
 - Die Anzahl der Schritte pro Etage ist durch n beschränkt und damit die gesamte Zeitkomplexität in diesem Fall durch $n * \log_2(n)$.
 - Man kann zeigen, dass die Zeitkomplexität des Quicksort **im durchschnittlichen Fall** von der Ordnung $n * \log_2(n)$ ist.

Zeitkomplexität des Quicksort (2)

d.h. Array wird nicht halbiert

Im **schlechtesten Fall** ist die Zeitkomplexität des Quicksort quadratisch, d.h. von der Ordnung n^2 . Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn das Array schon sortiert ist.

*n Etagen und
n Schritte pro Etage*



*wird als
Pivot das
erste Element
gen*