Kapitel 14

Bäume

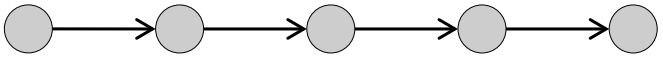
Ziele

- Den Begriff des Baums in der Informatik kennenlernen
- Bäume als verkettete Datenstruktur repräsentieren können
- Rekursive Funktionen auf Bäumen verstehen und schreiben können
- Verschiedene Möglichkeiten zum Durchlaufen von Bäumen kennenlernen („depth-first“, „breadth-first“)

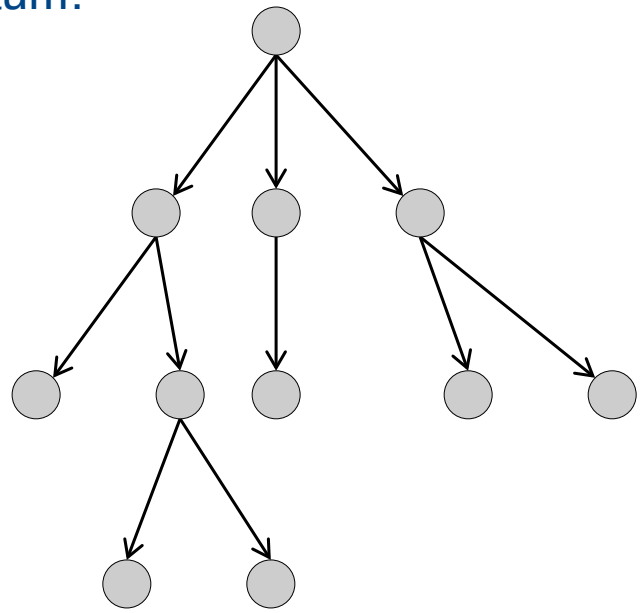
Bäume

- Bäume sind eine der am meisten verwendeten Datenstrukturen in der Informatik.
- Bäume verallgemeinern Listen:
  - In einer **Liste** hat jeder Knoten höchstens **einen Nachfolger**.
  - In einem **Baum** kann ein Knoten **mehrere Nachfolger** haben.

Liste:

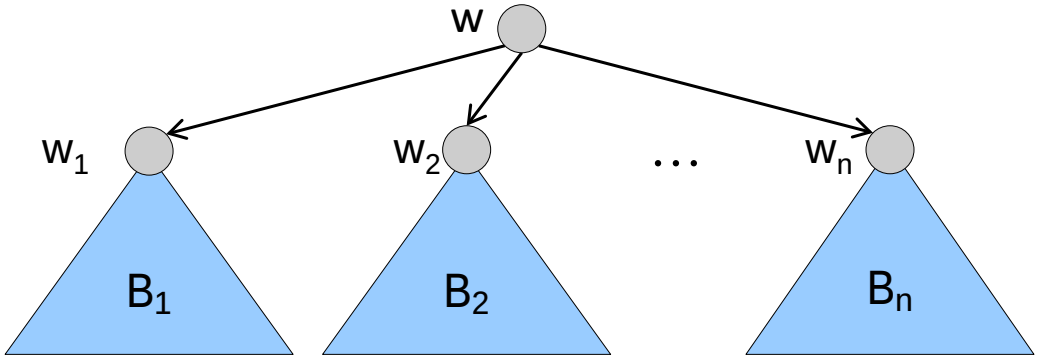


Baum:



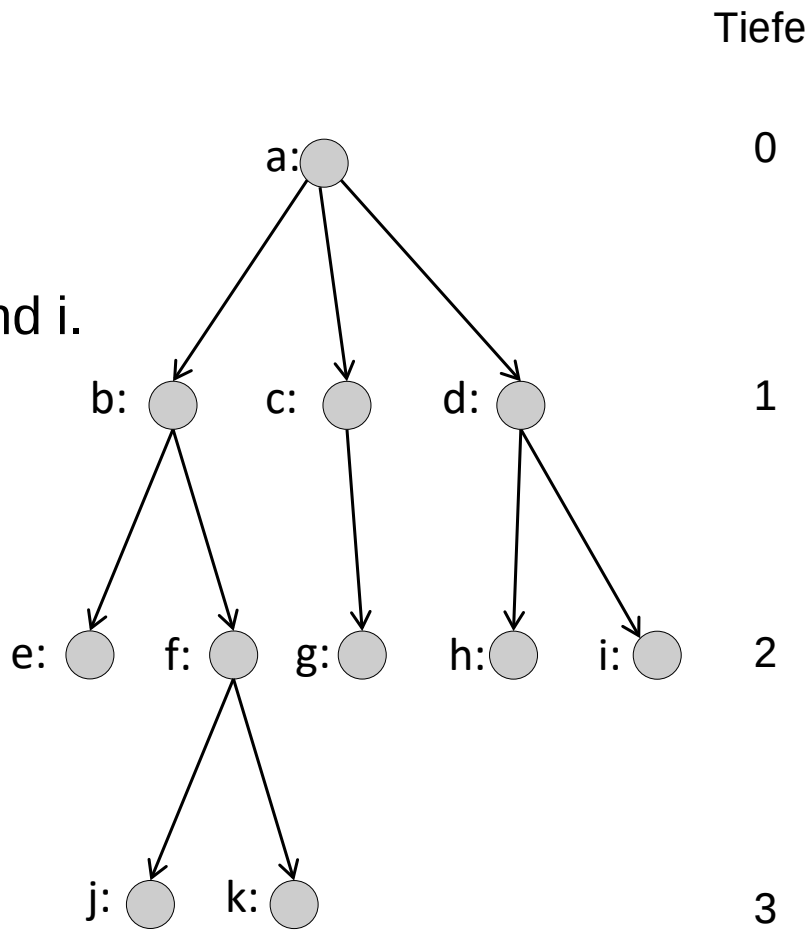
Bäume: Definition

- Ein Baum besteht aus **Knoten**, die durch **Kanten** miteinander verbunden sind. Jeder Baum hat einen **Wurzelknoten**, auf den keine Kante zeigt.
- In Knoten können je nach Anwendung verschiedene Daten gespeichert sein.
- Die Menge aller Bäume wird durch folgende Regeln konstruiert:
  - Es gibt einen leeren Baum.
  - Ein einzelner Knoten ohne irgendwelche Kanten ist ein Baum.
  - Ist $n > 0$ und sind $B_1, B_2, \ldots, B_n$ Bäume mit Wurzelknoten $w_1, w_2, \ldots, w_n$, so kann man diese zu einem größeren Baum zusammensetzen, indem man einen neuen Knoten w hinzufügt und diesen mit $w_1, w_2, \ldots, w_n$ verbindet. Der neue Knoten ist dann Wurzelknoten des so aufgebauten Baums.



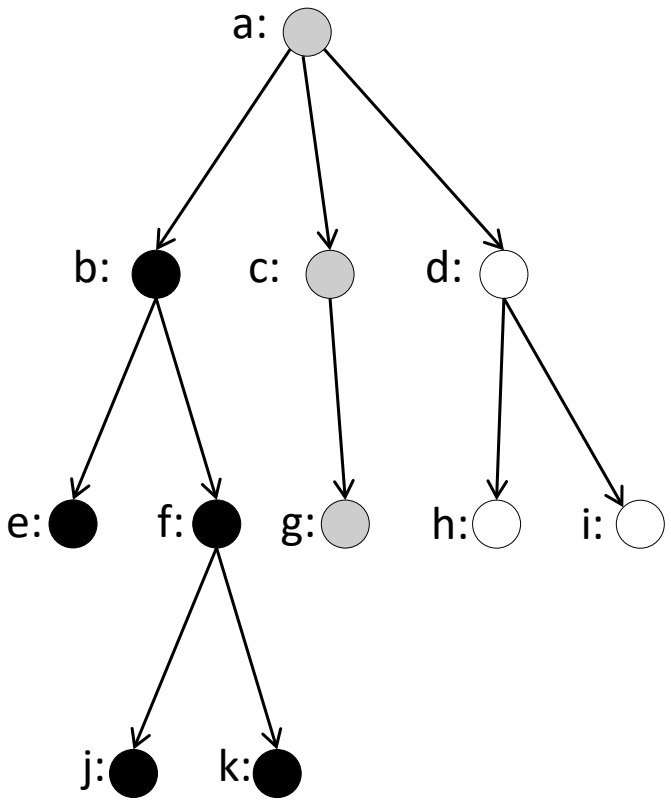
Bäume: Terminologie (1)

- a ist der **Wurzelknoten** des Baums.
- h und i sind die **Nachfolger-** oder auch **Kindknoten** des Knotens d.
- d ist **Vorgänger**- oder **Elternknoten** von h und i.
- Knoten ohne Nachfolger (hier: e, j, k, g, h, i) heißen **Blattknoten** (oder kurz **Blätter**).
- Die **Tiefe eines Knotens** im Baum ist die Anzahl der Schritte, die benötigt werden, um den Knoten von der Wurzel zu erreichen.
- Die **Tiefe des Baums** ist das Maximum der Tiefen aller Knoten des Baums. (hier: 3)
- Ein Baum ist ein **Binärbaum** wenn jeder Knoten darin höchstens zwei Nachfolger hat.



Bäume: Terminologie (2)

- Jeder Knoten in einem Baum ist Wurzel eines **Teilbaums** des gegebenen Baums.
- **Beispiele**: Der Teilbaum mit Wurzel b ist schwarz markiert und der mit Wurzel d ist weiß markiert. Der Teilbaum mit Wurzel a ist der ganze Baum selbst.
- Die Teilbäume mit Wurzeln b, c und d sind **Binärbäume**.
- Der gesamte Baum ist kein Binärbaum, da der Knoten a drei Nachfolger hat.



Bäume: Anwendungen (1)

Binärbäume können zur effizienten Speicherung von Daten benutzt werden. Sie stellen einen Mittelweg zwischen Arrays und Listen dar.

- Arrays:
  - Zugriff auf Elemente: O(1)
  - Einfügen eines Elements: O(n)
- Listen:
  - Zugriff auf Elemente: O(n)
  - Einfügen eines Elements: O(1)
- Geordnete Binärbäume:
  - Zugriff auf Elemente: O(log n)
  - Einfügen eines Elements: O(log n)

Bäume: Anwendungen (2)

- **Datenbanken:**
  - Bäume werden zur indizierten Speicherung großer Datenmengen benutzt.
- **Betriebssysteme:**
  - Dateisysteme sind in Baumstrukturen organisiert und gespeichert.

- Baumartige Datenstrukturen sind in verschiedensten Anwendungen nützlich. Als Beispiel betrachten wir im Folgenden die Anwendung von Huffman-Bäumen zur Datenkomprimierung.

Beispielanwendung: Huffman-Kodierung (1)

Bei der Speicherung von Text werden üblicherweise die einzelnen Zeichen kodiert und die Kodes der Zeichen dann hintereinander geschrieben.

- ASCII-Kodierung: Ein Zeichen wird mit 7 Bit kodiert.
- Java benutzt Unicode; ein Zeichen benötigt 16 Bit.
  - Alle Zeichen, die einen ASCII-Kode haben, haben denselben Wert im Unicode.
  - Unicode kann viele weitere Zeichen kodieren.

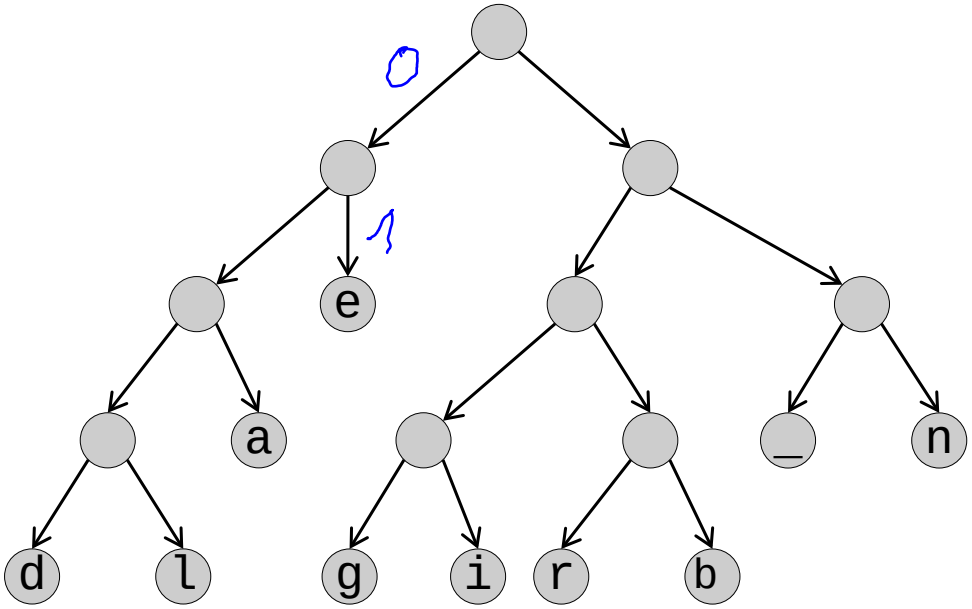
Zeichen	ASCII-Code
a	1100001
e	1100101
g	1100111
l	1101100

- Der 34 Zeichen lange Text „lege an eine brandnarbe nie naegel“ hat mit ASCII-Kodierung eine Länge von 34*7 Bit = 238 Bit:
- $\underbrace{1101100}_{l}\underbrace{1100101}_{e}\underbrace{1100111}_{g}\underbrace{1100101}_{e}\ldots$
- In Texten kommen nicht alle Zeichen gleich häufig vor. Es wäre effizienter, für oft vorkommende Zeichen einen kürzeren Kode zu verwenden.

Beispielanwendung: Huffman-Kodierung (2)

Die **Huffman-Kodierung** gibt häufig vorkommenden Zeichen einen kurzen Kode. Diese Kodierung wird z.B. im ZIP-Format benutzt.

- Anhand der Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben wird ein **Huffman-Baum** aufgestellt. (Wir erklären hier nicht, wie der Baum errechnet wird.)
- Der Kode eines Zeichens ist die Liste der Entscheidungen, die man treffen muss, um von der Wurzel im Huffman-Baum zu dem Zeichen zu gelangen. (0 = gehe zu linkem Kindknoten,
  1 = gehe zu rechtem Kindknoten)
- Beispiele:
  - e = 01 (erst links, dann rechts)
  - b = 1011
- Der Baum wird so gewählt, dass häufig vorkommende Zeichen einen kurzen Kode haben.



Beispielanwendung: Huffman-Kodierung (3)

Der Text

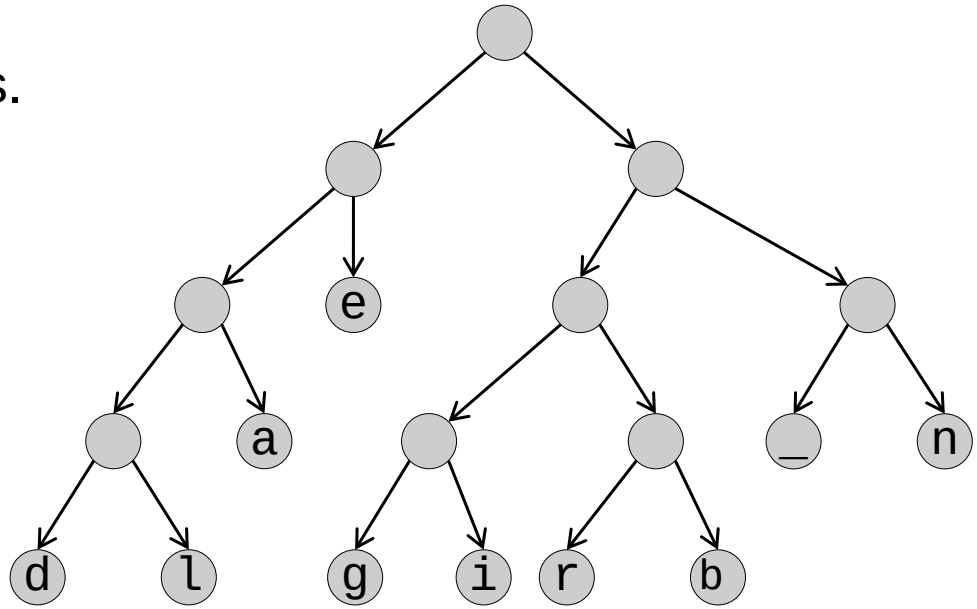
lege an eine brandnarbe nie naegel

wird kodiert als:

$$\underbrace{0001}_{l}\underbrace{0}_{e}\underbrace{1000}_{g}\underbrace{0}_{e}11000111111001100111101110101110100011110$$

00011100110101011011101111001011101110010110000010001

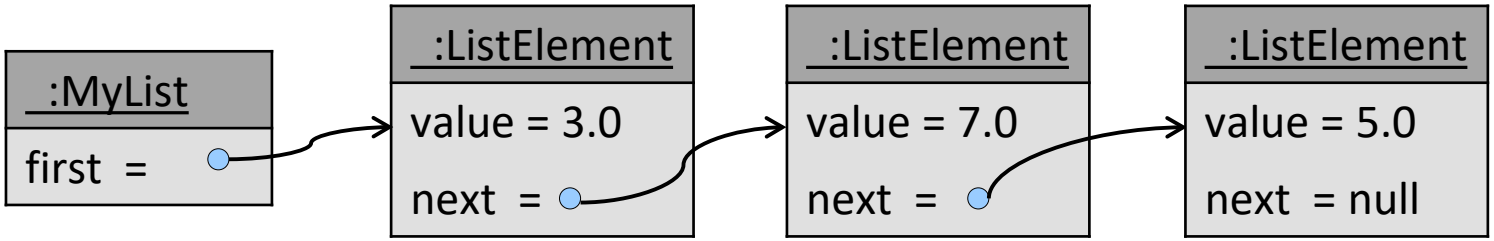
Der Text benötigt 105 Bits statt 238 Bits.



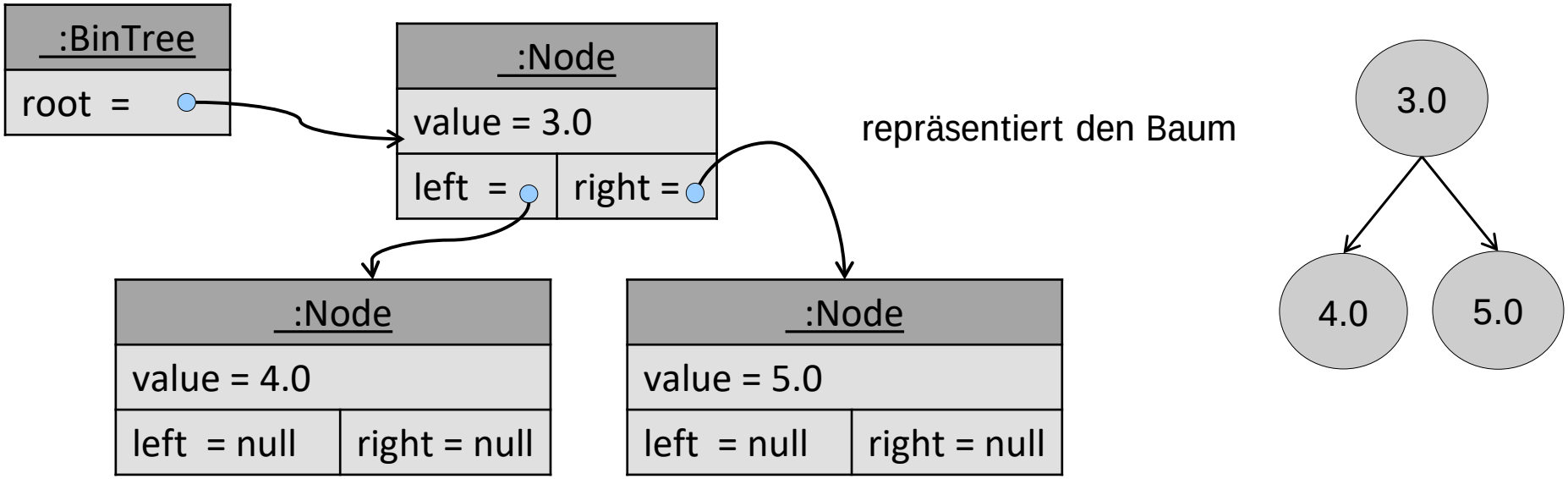
Binärbäume in Java

Bäume können in Java als verkettete Datenstruktur ganz ähnlich wie verkettete Listen implementiert werden.

- Zur Erinnerung: Speicherung einer Liste durch eine Kette von Objekten:



- Anstelle *eines* Nachfolgezeigers `next` haben die Elemente bei Binärbäumen nun *zwei* Nachfolgerzeiger `left` und `right`.



Klassen für Binärbäume

`BinTree`: Eine Klasse für Binärbäume, die Methoden für die verschiedene Operationen auf Binärbäumen bereitstellt. Objekte der Klasse `BinTree` haben eine Referenz auf den Wurzelknoten des Baumes.

`Node`: Eine Klasse, deren Objekte Baumknoten darstellen. Jedes Objekt hat einen `double`-Wert und zwei Referenzen: Eine auf den Wurzelknoten des linken Teilbaums und eine auf den Wurzelknoten des rechten Teilbaums. Die Referenz ist jeweils leer (`null`), wenn es keinen entsprechenden Teilbaum gibt.

BinTree
- Node root
+ BinTree() + BinTree(double v) + BinTree(BinTree left, double v, BinTree right) + boolean isEmpty() + double getRootValue() + BinTree getLeft() + BinTree getRight() + int size() + double sum() ...

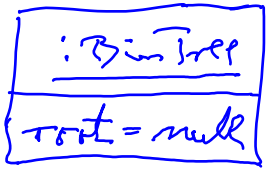
Node
- double value - Node left - Node right
+ Node(Node left, double value, Node right) + double getValue() + Node getLeft() + Node getRight()

Implementierung der Klasse Node

```
public class Node {
    private Node left;
    private double value;
    private Node right;

    public Node(Node left, double value, Node right) {
      this.left = left;
      this.value = value;
      this.right = right;
    }
    public double getValue() {
      return this.value;
    }
    public Node getLeft() {
      return this.left;
    }
    public Node getRight() {
      return this.right;
    }
}
```

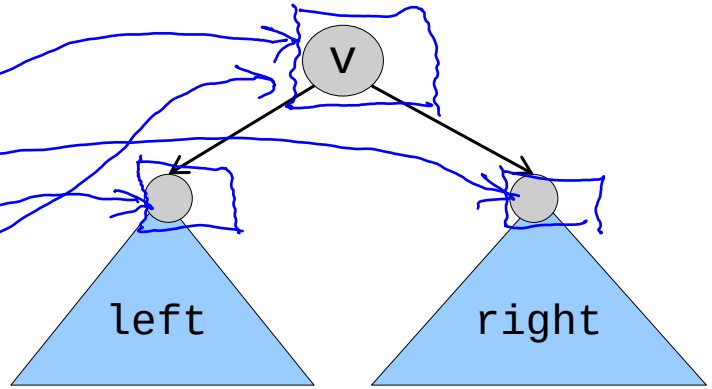
Die Klasse `BinTree` in Java: Konstruktoren

```
public class BinTree {
  private Node root;

  /** Erzeugt den leeren Baum */
  public BinTree() {
    this.root = null;
  }

  /** Erzeugt einen Baum mit einem einzigen Knoten */
  public BinTree(double v) {
    this.root = new Node(null, v, null);
  }

  /** Konstruiert einen Baum, aus zwei gegebenen
   * Teilbäumen und einer neuen Wurzel mit Wert v. */
  public BinTree(BinTree left, double v, BinTree right) {
    this.root = new Node(left.root, v, right.root);
  }
}
```



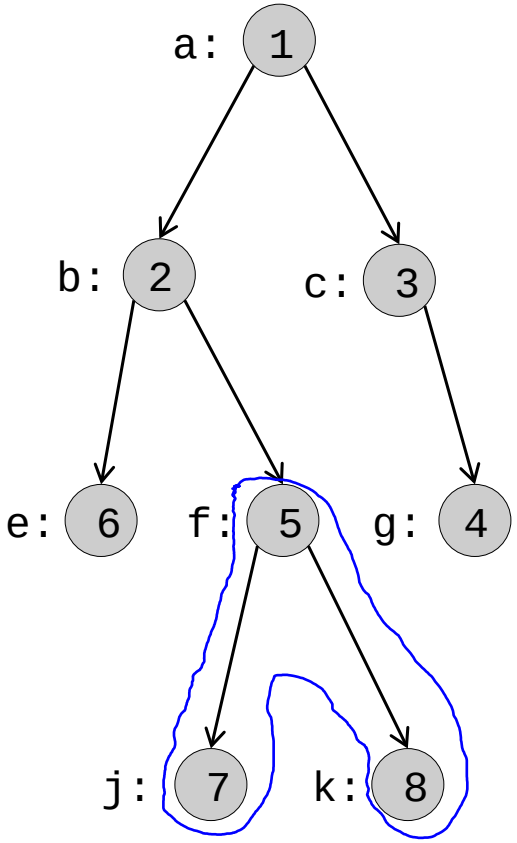
repräsentierter Baum:

leer

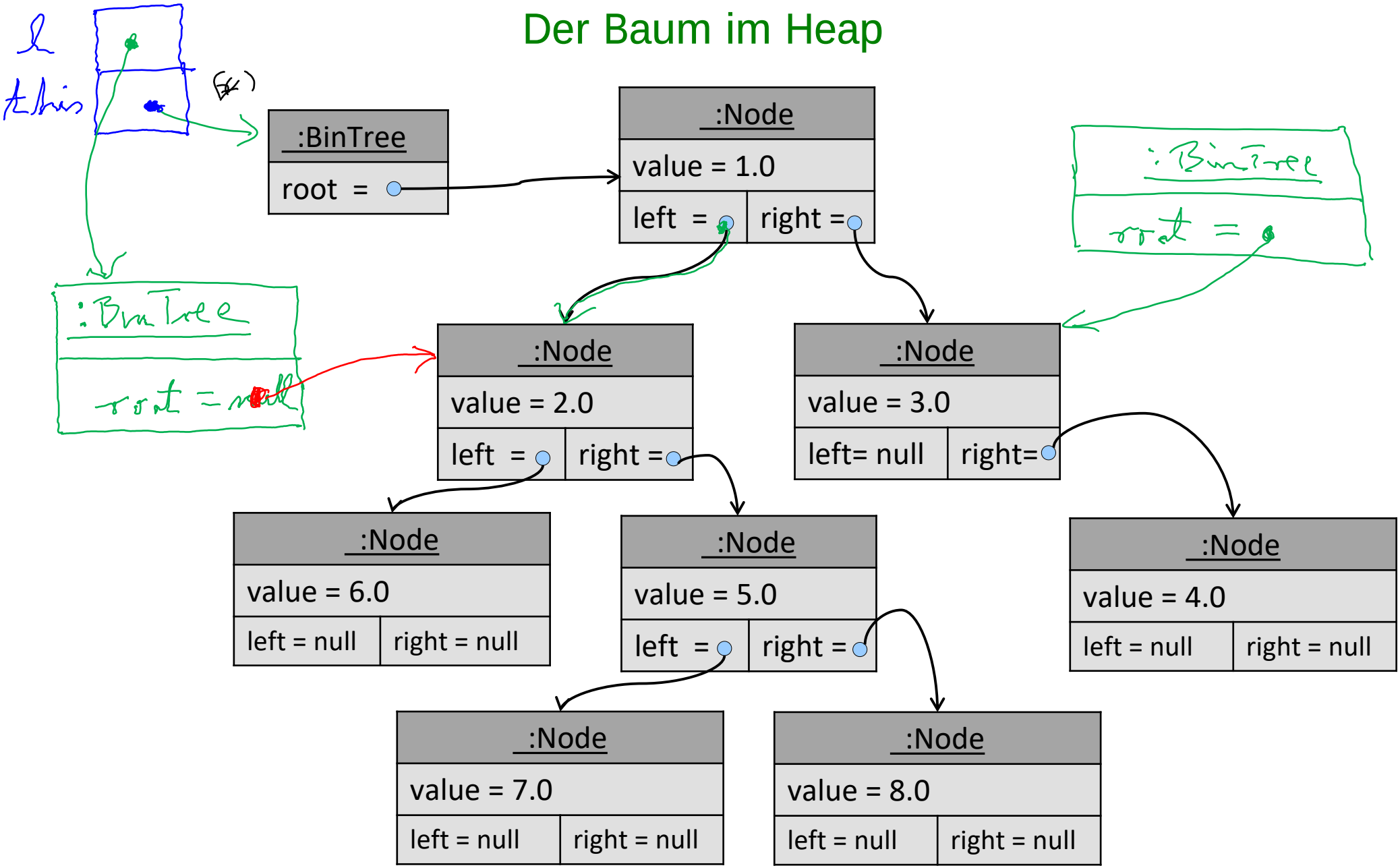


Beispiel für die Konstruktion eines Baums

```
public class BinTreeTest {

  public static void main(String[] args) {

    BinTree k = new BinTree(8);
    BinTree j = new BinTree(7);
    BinTree f = new BinTree(j, 5, k);
    BinTree e = new BinTree(6);
    BinTree b = new BinTree(e, 2, f);
    BinTree g = new BinTree(4);
    BinTree empty = new BinTree();
    BinTree c = new BinTree(empty, 3, g);
    BinTree a = new BinTree(b, 1, c);

    // Die Variablen repräsentieren jeweils
    // den Teilbaum mit dem gleichnamigen
    // Wurzelknoten.
  }
}
```



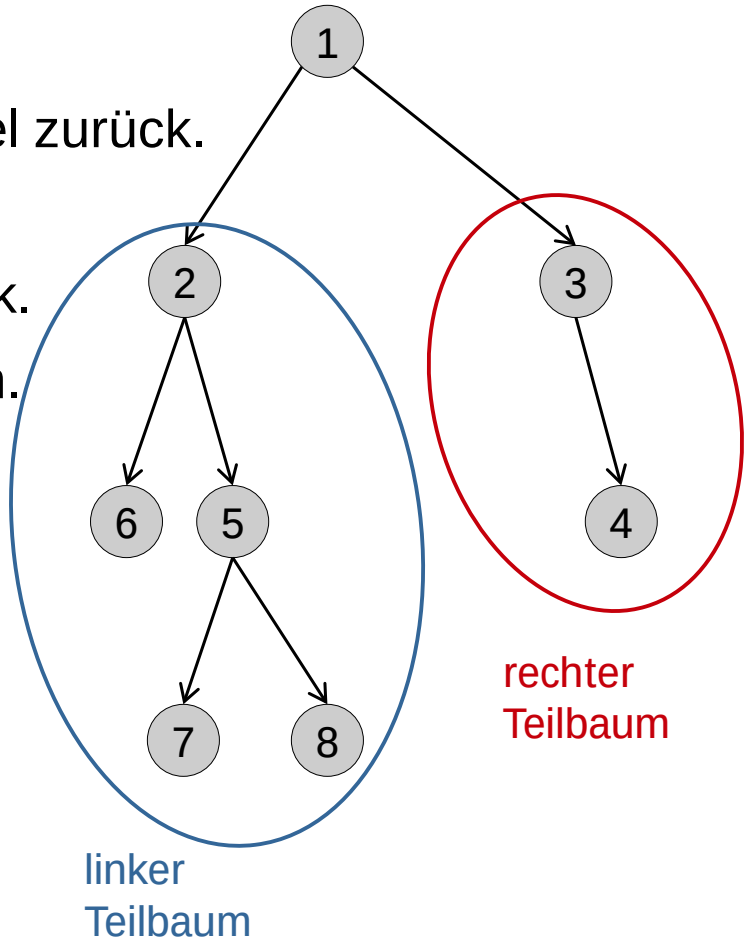
Der Baum im Heap



Operationen auf Binärbäumen

Wir implementieren folgende typische Operationen auf Binärbäumen:

- `isEmpty()` testet, ob ein Baum leer ist.
- Selektoren:
  - `getRootValue()` gibt den Wert an der Wurzel zurück.
  - `getLeft()` gibt den linken Teilbaum zurück.
  - `getRight()` gibt den rechten Teilbaum zurück.
- `size()` berechnet die Anzahl der Knoten im Baum.
- `sum()` berechnet die Summe der in den Knoten gespeicherten Zahlen.



Die Klasse `BinTree` in Java: Methoden

```
import java.util.NoSuchElementException;

public class BinTree {
    private Node root;
    ...

    public boolean isEmpty() {
      return this.root == null;
    }
    public double getRootValue() {
      if (this.root == null) {
         throw new NoSuchElementException(
                 "Ein leerer Baum hat keine Wurzel.");
      }
      return this.root.getValue();
    }
    public BinTree getLeft() {
      if (this.root == null) {
          throw new NoSuchElementException(
                 "Ein leerer Baum hat keinen linken Teilbaum.");
      }
      BinTree l = new BinTree();
      l.root = this.root.getLeft();
      return l;
    } //getRight analog }
```

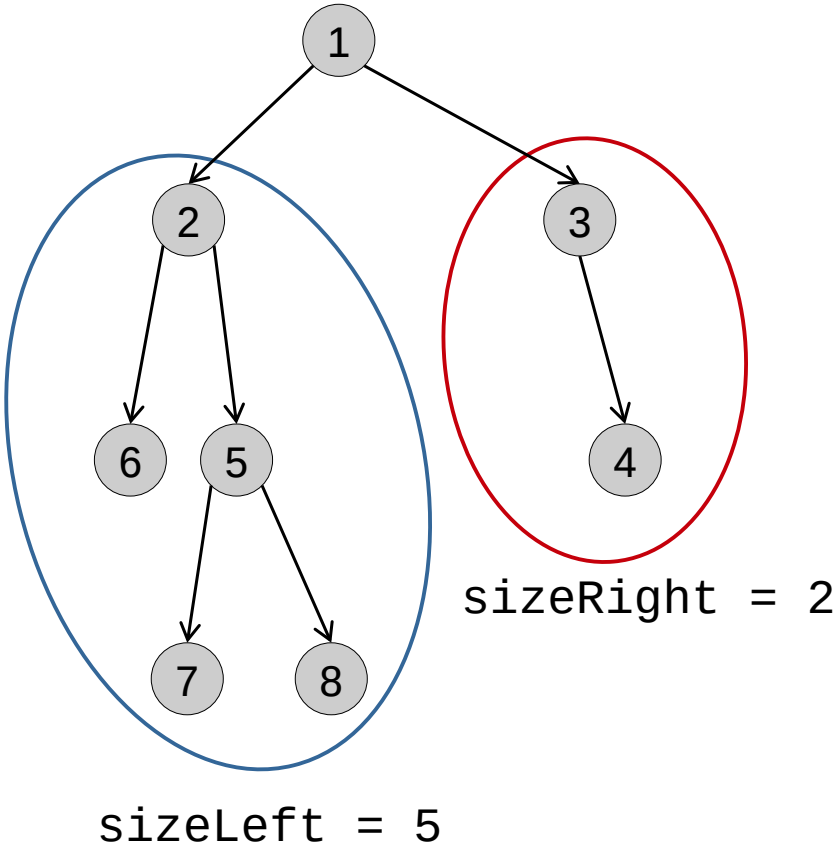
this.isEmpty()

der kleine Node

Anzahl der Knoten

Die Anzahl der Knoten in einem binären Baum kann **rekursiv** wie folgt berechnet werden:

- Berechne die Anzahl `sizeLeft` der Knoten im linken Teilbaum.
- Berechne die Anzahl `sizeRight` der Knoten im rechten Teilbaum.
- Gesamtanzahl der Knoten:
  `1 + sizeLeft + sizeRight`



Anzahl der Knoten: Implementierung

rekursive Aufrufe

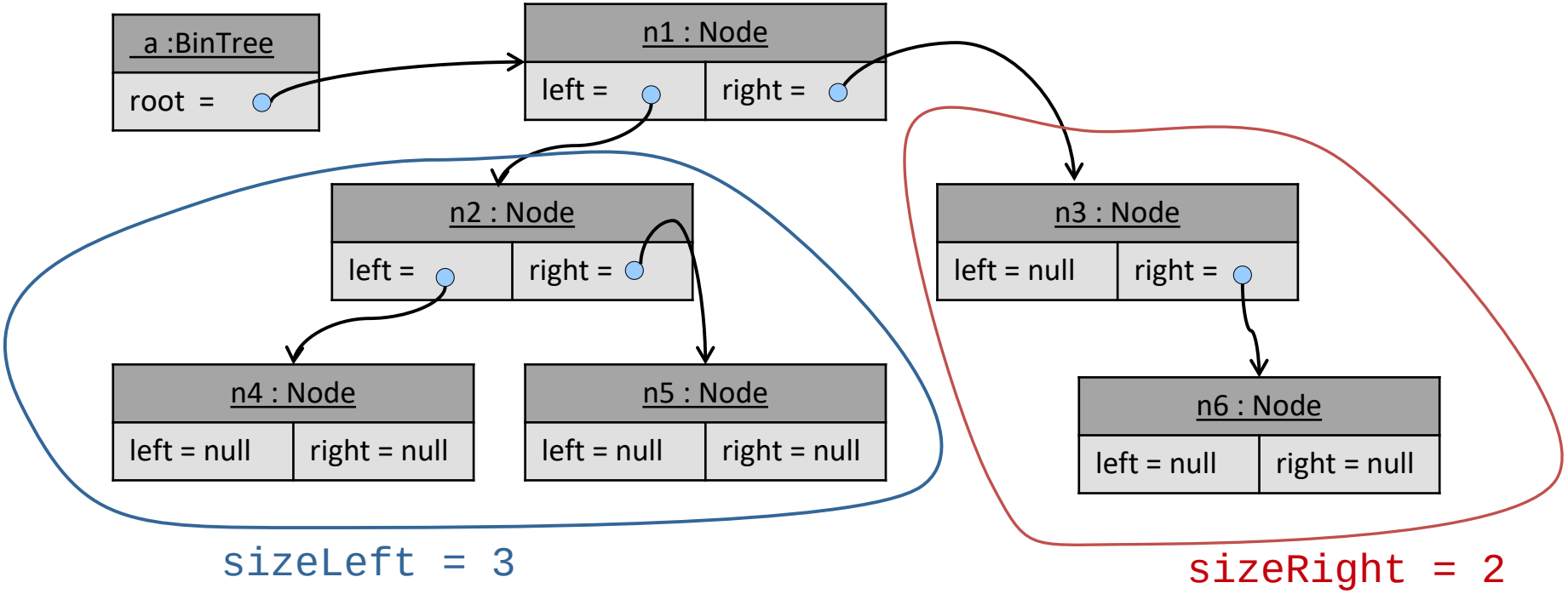
kaskadenartige Rekursion

```
public class BinTree {
  ...

   public int size() {
      if (isEmpty()) return 0;
      else return 1 + this.getLeft().size() + this.getRight().size();
    }
}
```

Diese Implementierung ist elegant aber nicht effizient, da die Methodenaufrufe getLeft() und getRight() immer ein zusätzliches BinTree-Objekt erzeugen.

Effizientere Implementierung (1)

- Deligiere die Berechnung der Größe des Baums an die `Node`-Objekte, d.h. füge in der Klasse `Node` noch eine Methode `size()` hinzu.
- Ein `Node`-Objekt berechnet die Größe des von ihm repräsentierten Teilbaums, indem es rekursiv die `size()`-Methode auf seinem linken und rechten `Node`-Objekt aufruft und so die Werte `sizeLeft` und `sizeRight` berechnen lässt. Die Größe des Teilbaums ist dann `1+sizeLeft+sizeRight`.



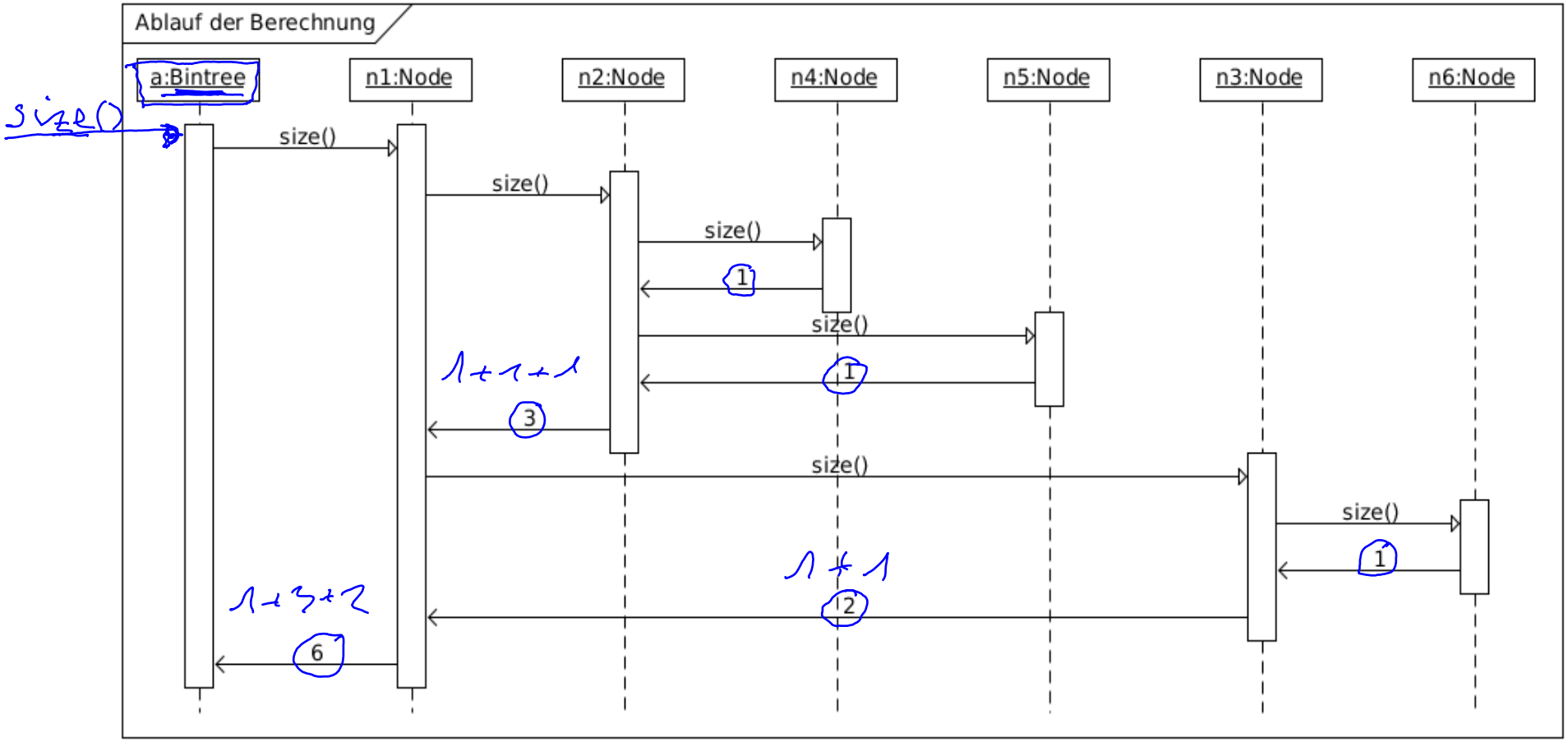
Effizientere Implementierung (2)

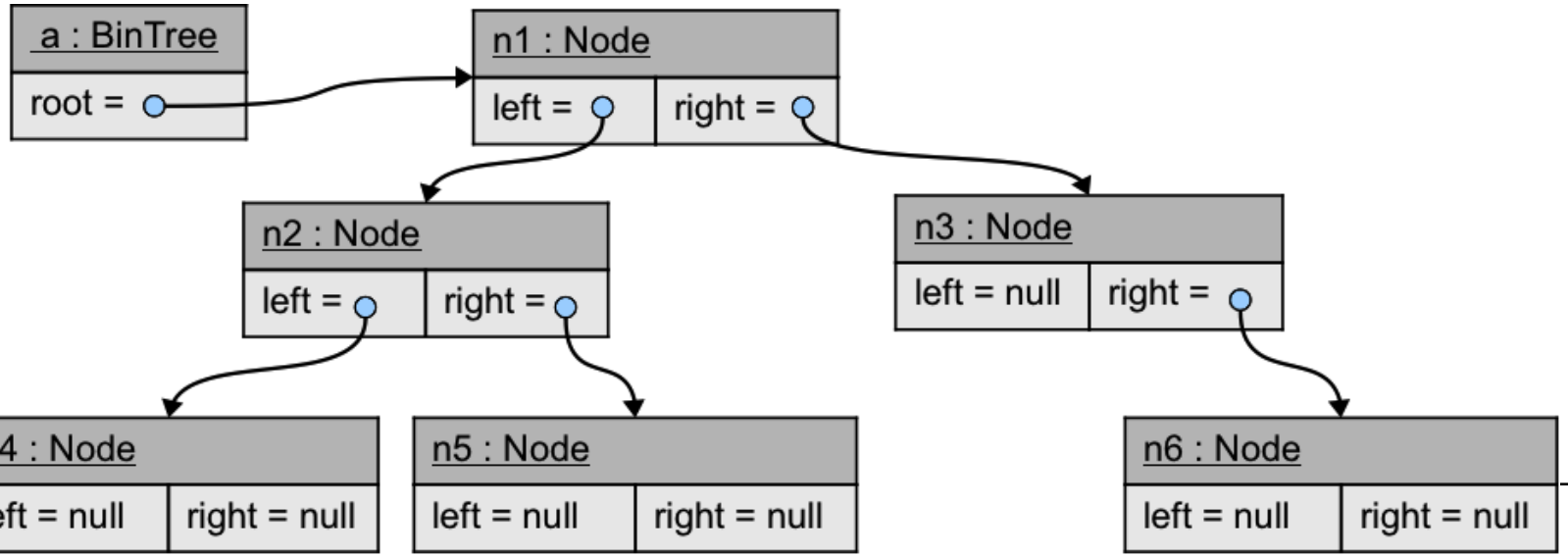
```
public class BinTree {

  ...

  public int size() {
    if (this.root == null)
      return 0;
    else
      return this.root.size();
  }
}
```

Delegation der Berechnung an den Wurzelknoten

```
public class Node {

  ...

  public int size() {
    int sizeLeft = 0;
    int sizeRight = 0;
    if (this.left != null)
      sizeLeft = this.left.size();
    if (this.right != null)
      sizeRight = this.right.size();
    return 1 + sizeLeft + sizeRight;
  }
}
```

rek. Aufrufe

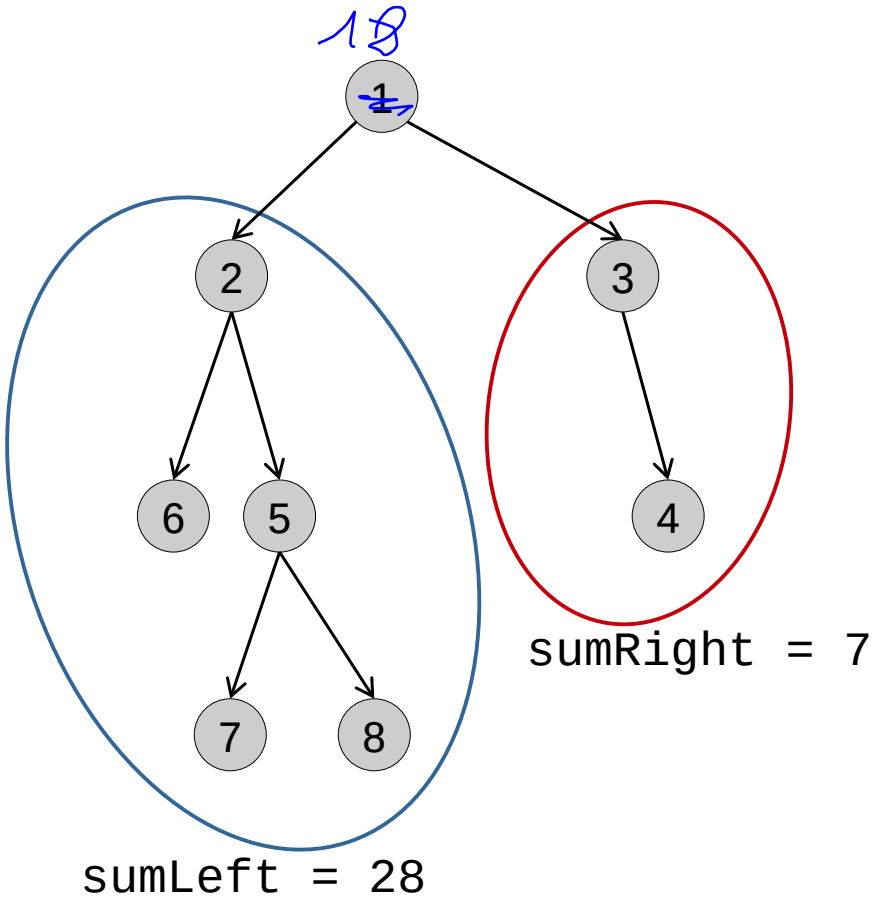

Ablauf der Berechnung
a:Bintree
n1:Node
n2:Node
n4:Node
n5:Node
n3:Node
n6:Node
size()
size()
size()
1
size()
1
1+1+1
3
size()
size()
1
1+1
2
1+3+2
6


a : BinTree
root =
n1 : Node
left =
right =
n2 : Node
left =
right =
n3 : Node
left = null
right =
n4 : Node
left = null
right = null
n5 : Node
left = null
right = null
n6 : Node
left = null
right = null

Summe der Werte aller Knoten

Die Summe der in einem Binärbaum gespeicherten Zahlen kann ebenfalls rekursiv berechnet werden:

- Berechne die Summe `sumLeft` im linken Teilbaum.
- Berechne die Summe `sumRight` im rechten Teilbaum.
- Gesamtsumme der Knoten: `value + sumLeft + sumRight`



Summe der Werte aller Knoten: Implementierung

```
public class BinTree {
   ...

   public double sum() {
      if (isEmpty()) return 0;
      else
            return this.getRootValue() + this.getLeft().sum() + this.getRight().sum();
   }
}
```

Effizientere Implementierung

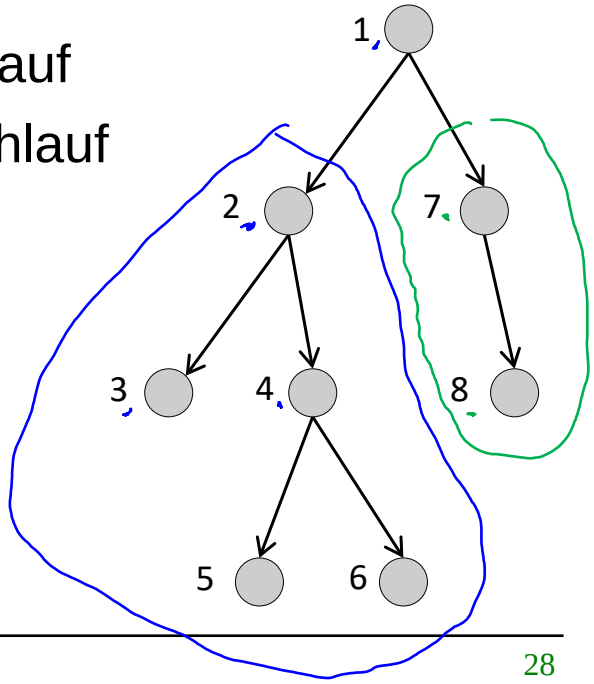
```
public class BinTree {

  ...

  public double sum() {
    if (this.root == null)
      return 0;
    else
      return this.root.sum();
  }
}
```

```
public class Node {

  ...

  public double sum() {
    double sumLeft = 0;
    double sumRight = 0;
    if (this.left != null)
      sumLeft = this.left.sum();
    if (this.right != null)
      sumRight = this.right.sum();
    return this.value + sumLeft + sumRight;
  }
}
```

Durchlaufen eines Baums (1)

- Wie bei Listen möchte man über alle Elemente des Baums iterieren können.
- Bei Listen gibt es *eine* natürliche Ordnung des Durchlaufs, von vorn nach hinten.
- Bei Bäumen gibt es mehrere sinnvolle Reihenfolgen des Durchlaufs, die je nach Anwendungsfall alle benutzt werden. Wichtige Beispiele:
  - **Tiefendurchlauf** („depth-first traversal“):
    - Besuche Wurzel
    - Besuche linken Teilbaum mit Tiefendurchlauf
    - Besuche rechten Teilbaum mit Tiefendurchlauf

Reihenfolge der Knoten
in einem Tiefendurchlauf:

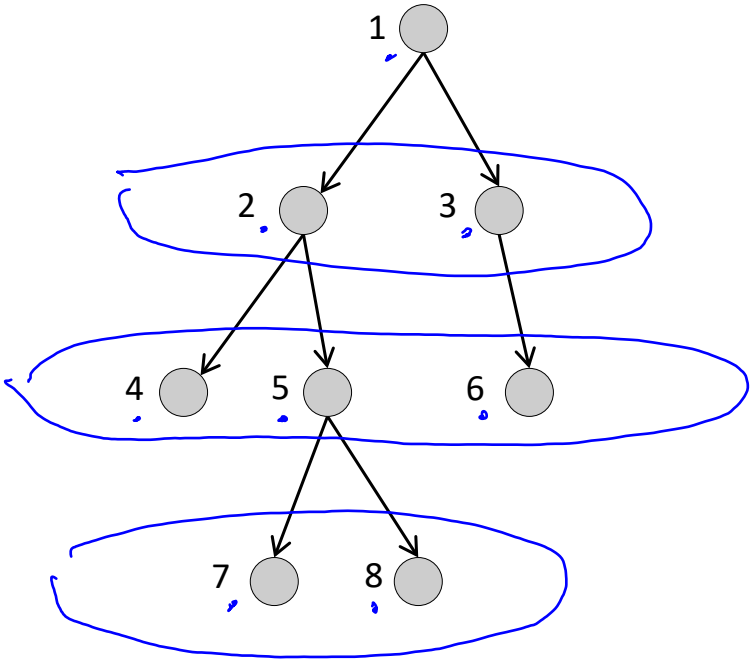


Durchlaufen eines Baums (2)

- **Breitendurchlauf** („breadth-first traversal“)

  Besuche die Knoten nach der Breite des Baumes geordnet.

Reihenfolge der Knoten
in einem Breitendurchlauf:



Baumdurchlauf mit Iteratoren

Implementierung zweier Iteratoren, welche die beiden Arten des Baumdurchlaufs realisieren.

BinTree
... + DFIterator dfIterator() + BFIterator bfIterator()

Iterator für Tiefendurchlauf:

DFIterator
- LinkedList<Node> toVisit
+ DFIterator(Node n) + boolean hasNext() + double next()

Iterator für Breitendurchlauf:

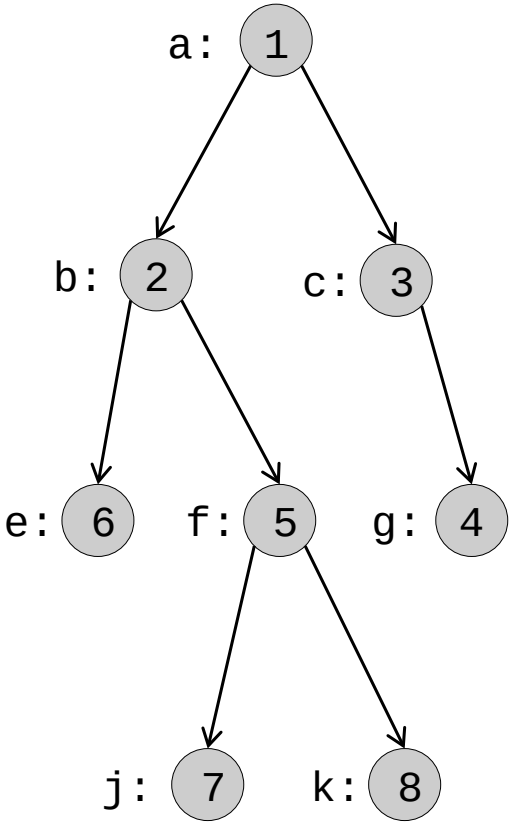
BFIterator
- LinkedList<Node> toVisit
+ BFIterator(Node n) + boolean hasNext() + double next()

```
public DFIterator dfIterator() {
    return new DFIterator(this.root);
}
public BFIterator bfIterator() {
    return new BFIterator(this.root);
}
```

next() liefert den Wert des als nächstes zu besuchenden Knotens (wenn es einen gibt, d.h. hasNext() liefert true) und geht dann zum darauffolgenden Knoten ~~(wenn es den gibt)~~.

Beispiel für einen Tiefendurchlauf

```
public class BinTreeTest {

  public static void main(String[] args) {

    BinTree k = new BinTree(8);
    BinTree j = new BinTree(7);
    BinTree f = new BinTree(j, 5, k);
    BinTree e = new BinTree(6);
    BinTree b = new BinTree(e, 2, f);
    BinTree g = new BinTree(4);
    BinTree empty = new BinTree();
    BinTree c = new BinTree(empty, 3, g);
    BinTree a = new BinTree(b, 1, c);

    DFIterator it = a.dfIterator();
    while (it.hasNext()) {
      System.out.print(it.next() + " ");
    }
  }
}
```



Ausgabe: `1.0  2.0  6.0  5.0  7.0  8.0  3.0  4.0`

Klasse `DFIterator` für Tiefendurchlauf (1)

```
import java.util.LinkedList<E>;

public class DFIterator {
    // Liste der Wurzeln aller noch zu besuchender Teilbäume,
    // in der Reihenfolge, in der sie besucht werden sollen.
    private LinkedList<Node> toVisit;

    // Der Iterator durchläuft den Baum mit Wurzel
    // im Tiefendurchlauf.
    public DFIterator(Node n) {
      this.toVisit = new LinkedList<Node>();
      if (n != null)
          this.toVisit.addFirst(n);
    }

    public boolean hasNext() {
        return !this.toVisit.isEmpty();
    }
}
```

leere Liste

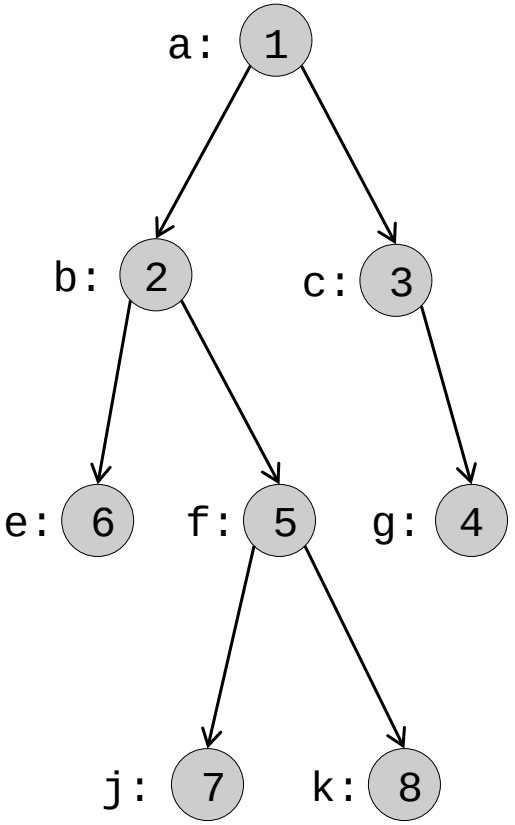
erster zu besuchender Knoten

Klasse `DFIterator` für Tiefendurchlauf (2)

```
//Die Methode soll nur aufgerufen werden, wenn vorher mit hasNext() getestet wurde,
//dass es ein nächstes Element gibt.
public double next() {
  // Das erste Element der Liste toVisit ist die Wurzel des
  // nächsten zu besuchenden Baums. Beim Tiefendurchlauf
  // soll diese Wurzel als nächster Knoten besucht werden.
  Node n = this.toVisit.removeFirst();

  Node left = n.getLeft();
  Node right = n.getRight();

  // Als nächstes muss der Baum mit Wurzel left besucht werden
  // und danach der Baum mit Wurzel right.
  if (right != null) {
    this.toVisit.addFirst(right);
  }
  if (left != null) {
    this.toVisit.addFirst(left);
  }
  // Nun ist left ganz vorne in toVisit, gefolgt von right.
  return n.getValue(); // Rückgabe des Werts der aktuellen Wurzel
}
}
```

Beispiel für einen Breitendurchlauf

```
public class BinTreeTest {

  public static void main(String[] args) {

    BinTree k = new BinTree(8);
    BinTree j = new BinTree(7);
    BinTree f = new BinTree(j, 5, k);
    BinTree e = new BinTree(6);
    BinTree b = new BinTree(e, 2, f);
    BinTree g = new BinTree(4);
    BinTree empty = new BinTree();
    BinTree c = new BinTree(empty, 3, g);
    BinTree a = new BinTree(b, 1, c);

    BFIterator it = a.bfIterator();
    while (it.hasNext()) {
      System.out.print(it.next() + " ");
    }
  }
}
```



Ausgabe: `1.0  2.0  3.0  6.0  5.0  4.0  7.0  8.0`

Klasse `BFIterator` für Breitendurchlauf (1)

```
import java.util.LinkedList<E>;

public class BFIterator {
    // Liste der Wurzeln aller noch zu besuchender Teilbäume,
    // in der Reihenfolge, in der sie besucht werden sollen.
    private LinkedList<Node> toVisit;

    // Der Iterator besucht den Baum mit Wurzel n als
    // Breitendurchlauf.
    public BFIterator(Node n) {
        this.toVisit = new LinkedList<Node>();
        if (n != null) {
            this.toVisit.addFirst(n);
        }
    }

    public boolean hasNext() {
        return ! this.toVisit.isEmpty();
    }
}
```

Bemerkung: Dieser Teil ist identisch zum Iterator für Tiefensuche.

Klasse `BFIterator` für Breitendurchlauf (2)

```
public double next() {
    Node n = toVisit.removeFirst();
    Node left = n.getLeft();
    Node right = n.getRight();

    // Im Unterschied zum Tiefendurchlauf werden die beiden
    // Teilbäume von n hier hinten angefügt.
    if (left != null) {
        this.toVisit.addLast(left);
    }
    if (right != null) {
        this.toVisit.addLast(right);
    }
    return n.getValue();
}
```

Zusammenfassung

- Bäume sind eine wichtige Datenstruktur in der Informatik
- **Binäre Bäume** können in Java implementiert werden als Verallgemeinerung der einfach verketteten Listen mit bis zu zwei Nachfolgerverweisen.
- Viele Operationen auf binären Bäumen werden rekursiv definiert.
- In Java kann man rekursiv definierte Funktionen auf Bäumen implementieren
  - durch Weitergeben der Operation an die Knotenklasse oder
  - durch Fallunterscheidung bzgl. des leeren Baums und rekursiven Aufruf der Selektoren `getLeft()` und `getRight()` von `BinTree`.
- Wichtige Arten des Baumdurchlaufs sind Tiefendurchlauf und Breitendurchlauf.